Е.В. Родина

Методические рекомендации
к выполнению конкурсных заданий по математике
теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» в номинации «*Кадетский класс*» по направлению «Защита населения и территорий от чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера (МЧС)», ВКС, СВ, ПВО, РВСН, ВМФ»

МОСКВА 2024

Содержание

Введение

Математика для будущих курсантов, а пока кадетов, один из самых важных предметов. Согласно законам математики и физики можно получить ответы на разные вопросы, например, как узнать путь парашютиста при ветре, дующем горизонтально? Под каким углом нужно выпустить ракету для уничтожения противника? Математика необходима в военном деле для точных расчётов. Владимир Сергеев, будучи ещё суворовцем написал стихотворение о математике:

Если б не было математики,
Жить нам было бы скучновато:
Ни хоккея, ни акробатики,
Ни рекордов,ни результатов,
Ни секунд и ни сантиметров,
Ни замеров в прыжках с трамплина,
Ни поправок в стрельбе при ветре,
Ни дистанций коротких и длинных.

Не летели бы к финишу лыжники:
Цифр нет - и спешить не надо.
Не скользили бы кёрлинг - булыжники.
В общем, не было б Олимпиады.
Но сегодня Россию радуя,
Поднимая медали гордо,
Мы законами математики
Подтверждаем законы спорта!

Изучение математики требует от кадетов умения анализировать сложные ситуации, логически мыслить, находить решения, выделять ключевые элементы, определять последовательность действий, аргументировать их и применять для получения верного ответа. Математика развивает способность мыслить системно, разбивать проблемы на части и рассматривать их по шагам.

Данные методические рекомендации предназначены для подготовки к выполнению конкурсных заданий по информатике теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» в номинации «*Кадетский класс*» по направлению

«Защита населения и территорий от чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера (МЧС)», ВКС, СВ, ПВО, РВСН, ВМФ».

Рассматривается необходимый теоретический минимум для решения конкурсных задач по математике. Предлагается доказательство формулы Пика, алгоритмы построения графиков функции «целой и дробной части числа».

Рекомендации сопровождаются примерами и разбором решения демонстрационного варианта по математике.

1 Площадь плоских фигур

1.1 Основные понятия

Свойства площадей.

Свойство1. Равные многоугольники F_1 и F_2 имеют равные площади (рис. 1).

$$F_1 = F_2 \quad \Rightarrow S_{F_1} = S_{F_2}$$

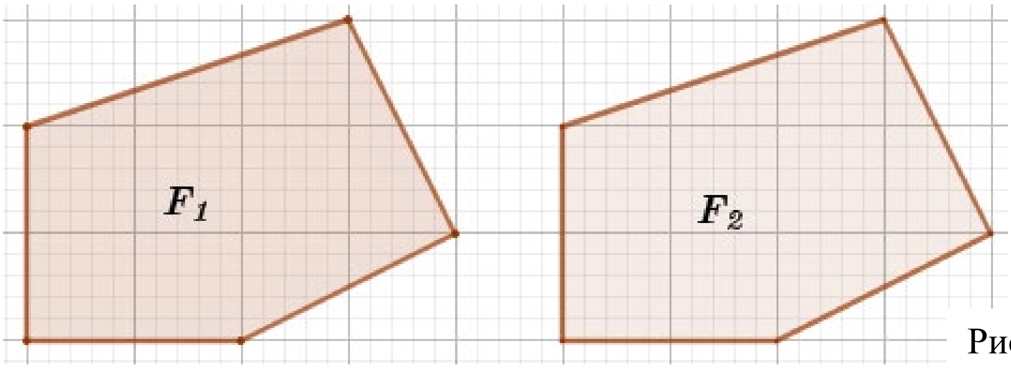
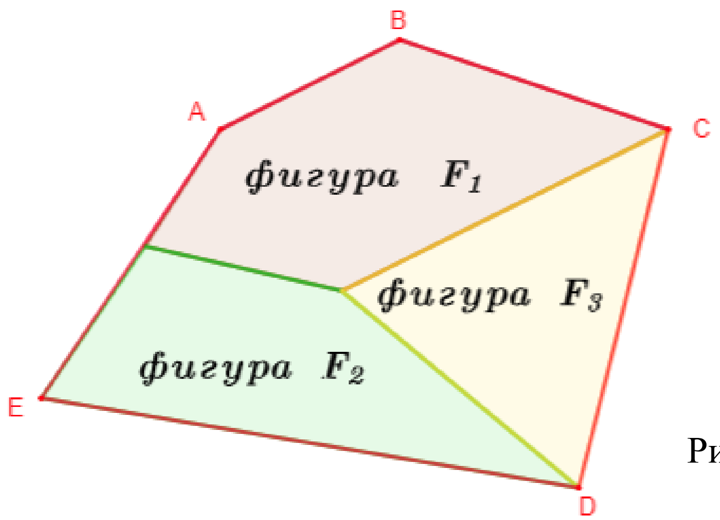


Рис. 1

Многоугольники, имеющие равные площади называются *равновеликими*.

На рисунке 1 многоугольники F_1 и F_2 равновеликие.

Свойство 2. Если многоугольник *ABCDE* составлен из нескольких многоугольников F_1, F_2 и F_3, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников (рис. 2).



$$S_{ABCDE} = S_{F_1} + S_{F_2} + S_{F_3}$$

Рис. 2

Если многоугольник разрезан на несколько многоугольников и из них составлен другой многоугольник, то такие многоугольники называют *равносоставленными* (рис. 3).

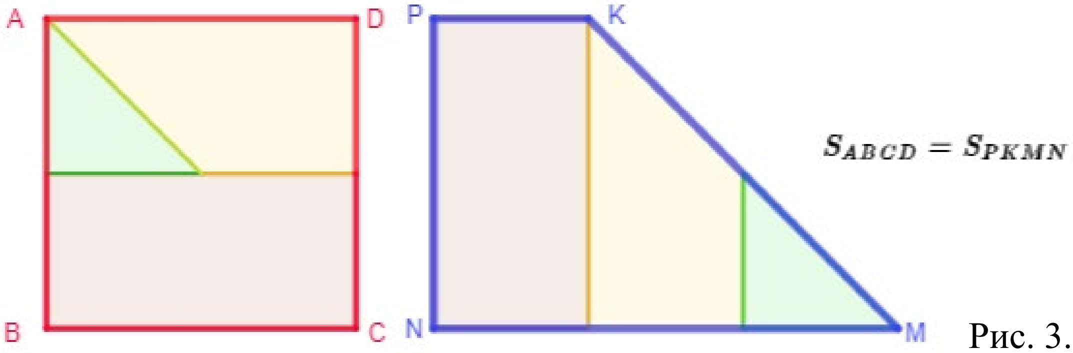
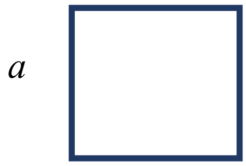
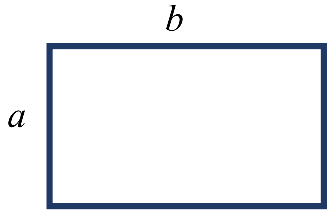
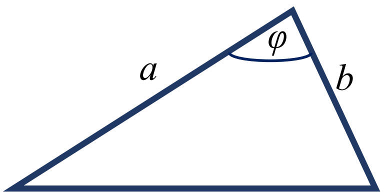
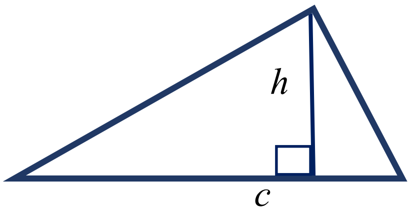
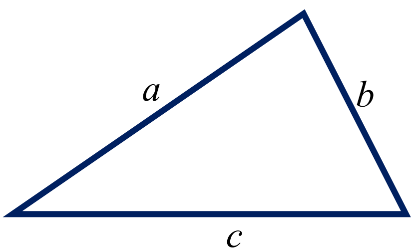


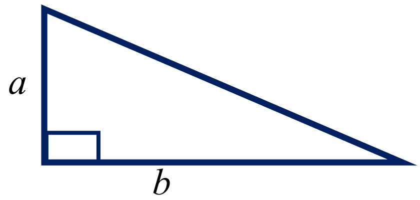
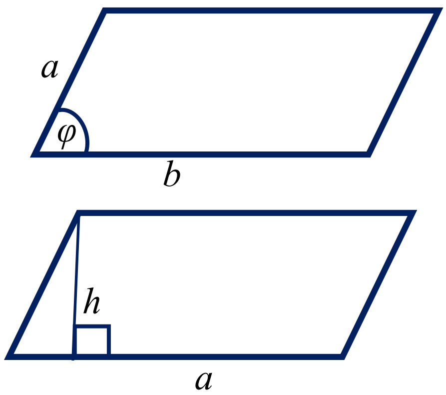
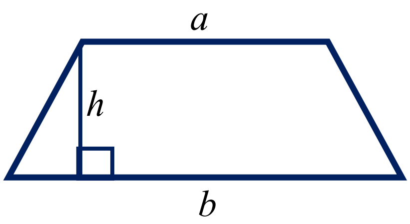
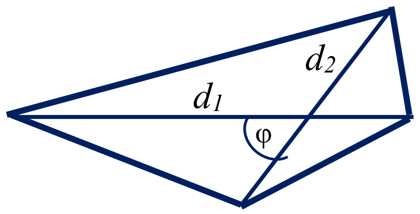
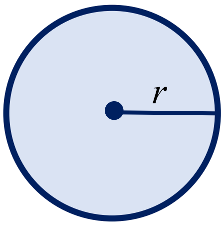
Рис. 3.

Свойство 3. Если два многоугольника равносоставленные, то они равновеликие.

Если два многоугольника равновеликие, то они равносоставленные.

1.2 Площади некоторых плоских фигур

Фигура	***Название***	***Формула***
	квадрат	$S = a^2$
	прямоугольник	$S = a \cdot b$
  	треугольник	$S = \frac{a \cdot b}{2} sin(\varphi)$ $S = \frac{a \cdot h}{2}$ Формула Герона $S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)},$ $p = \frac{a+b+c}{2}$

	прямоугольный треугольник	$S = \frac{a \cdot b}{2}$
	параллелограмм	$S = a \cdot b \cdot sin(\varphi)$ $S = a \cdot h$
	трапеция	$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$
	четырёхугольник	$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} sin(\varphi)$
	круг	$S = \pi \cdot r^2$

1.3 Способы нахождения площадей плоских фигур

Первый способ. Площадь плоской фигуры можно найти с помощью известных формул (см. таблицу выше). Для этого нужно вычислить необходимые элементы: стороны, углы, высоты, диагонали, радиус. Данный способ удобен для стандартных фигур: треугольника, параллелограмма, трапеции, круга и т.д. Найдём площадь треугольника на рисунке 4 по формуле $S = \frac{a \cdot b}{2} sin(\varphi)$, принимая сторону клетки за 1. Для этого необходимо вычислить две стороны треугольника и синус угла между ними.

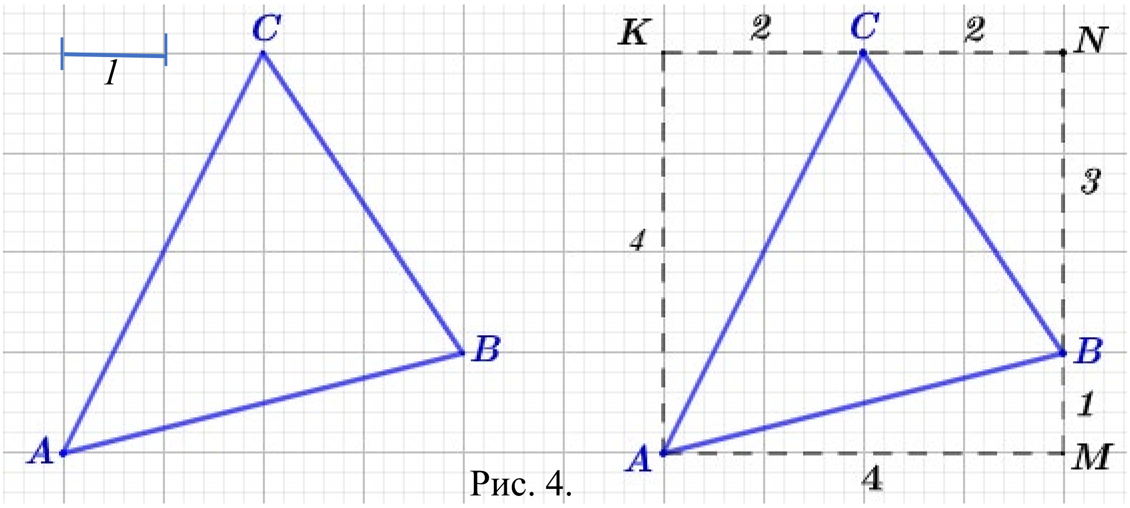


Рис. 4.

$$\Delta AKC: \qquad AC = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\Delta BNC: \qquad BC = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$\Delta AMB: \qquad AB = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

По теореме косинусов

$$cos(\angle A) = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2 \cdot AC \cdot AB} = \frac{20 + 17 - 13}{2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{17}} = \frac{24}{4 \cdot \sqrt{85}} = \frac{6}{\sqrt{85}}$$

Заметим, что $cos(\angle A) > 0$, значит $\angle A$ острый. Тогда

$$sin(\angle A) = \sqrt{1 - \left(\frac{6}{\sqrt{85}}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{85}} = \frac{7}{\sqrt{85}}$$

По формуле площади для треугольника получим

$$\boldsymbol{S_{ABC}} = \frac{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{17}}{2} \cdot \frac{7}{\sqrt{85}} = \mathbf{7}.$$

Второй способ. Другой способ вычисления площади плоской фигуры состоит в том, чтобы достроить её до прямоугольника, затем из площади прямоугольника вычесть «лишние» площади дополнительных фигур. Способ очень удобен как для простых , так и для сложных фигур. Возьмём тот же треугольник, что и в первом способе. Опишем около него квадрат (рис. 5).

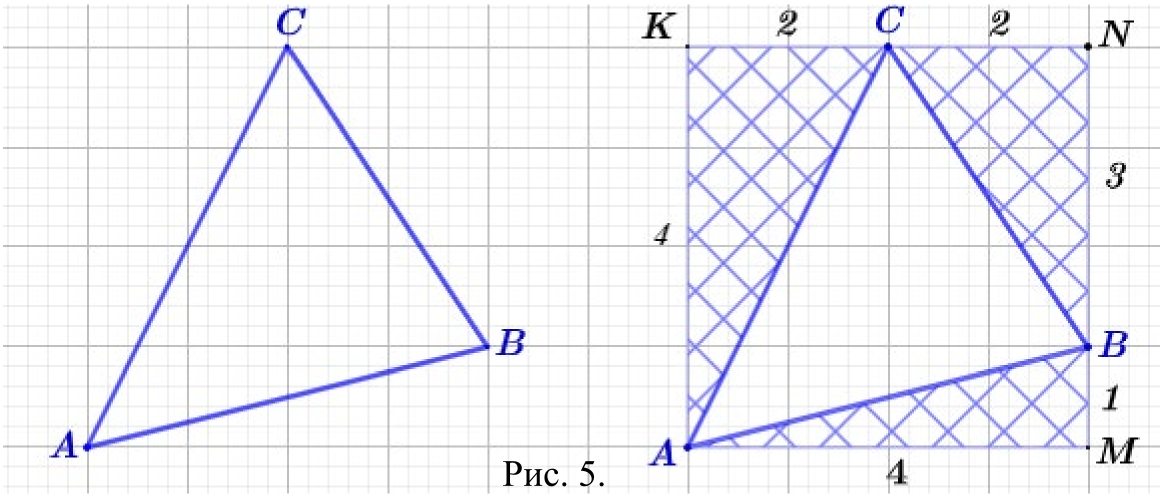


Рис. 5.

$$S_{ABC} = S_{AKNM} - S_{AKC} - S_{BNC} - S_{AMB} = AK^2 - \frac{AK \cdot KC}{2} - \frac{BN \cdot NC}{2} - \frac{AM \cdot MB}{2}$$

$$\boldsymbol{S_{ABC}} = 4^2 - \frac{4 \cdot 2}{2} - \frac{3 \cdot 2}{2} - \frac{4 \cdot 1}{2} = \mathbf{7}.$$

Получили ответ как и в первом способе.

Третий способ. Для нахождения площади плоской фигуры можно разбить её на стандартные фигуры, площади которых легко найти по известным формулам. Далее по свойствам площадей суммировать все вычисленные площади (рис. 6).

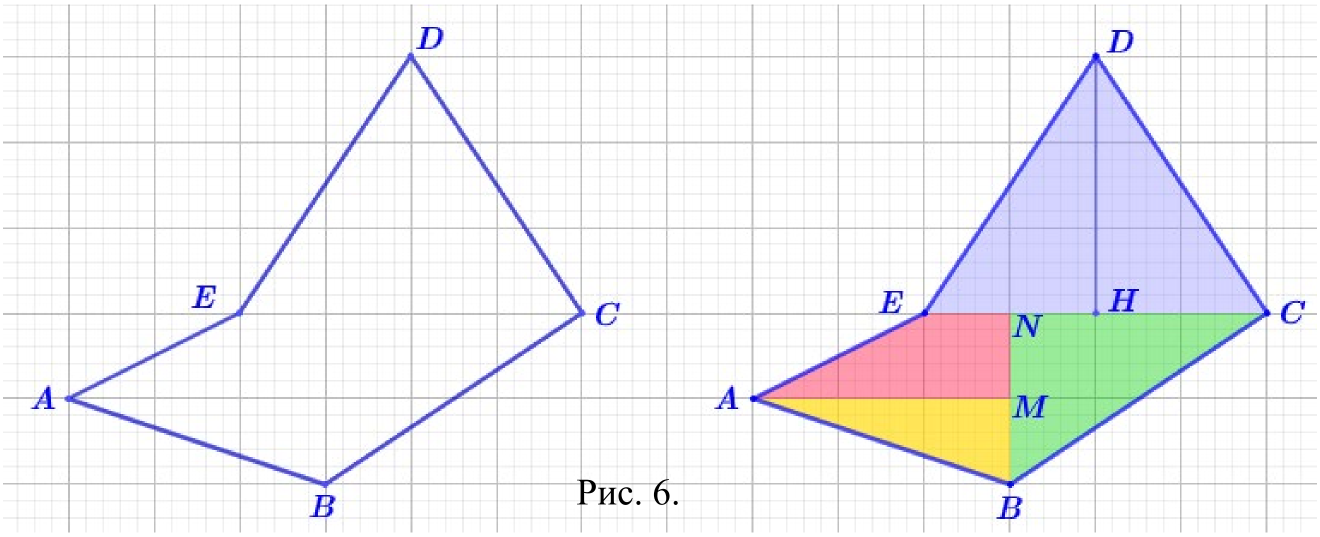


Рис. 6.

$$S_{ABCDE} = S_{ABM} + S_{AMNE} + S_{BNC} + S_{CDE} =$$

$$= \frac{AM \cdot BM}{2} + \frac{EN + AM}{2} \cdot NM + \frac{BN \cdot CN}{2} + \frac{EC \cdot DH}{2}$$

$$\boldsymbol{S_{ABCDE}} = \frac{3 \cdot 1}{2} + \frac{1 + 3}{2} \cdot 1 + \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{4 \cdot 3}{2} = \mathbf{12,5}.$$

Четвёртый случай. Площадь многоугольника можно вычислить по формуле Пика. Но данный способ применим только для многоугольников с вершинами в узлах решётки (вершины − точки пересечения линий сетки на клетчатой бумаги).

Площадь фигуры на квадратной решётке.

Георг Александр Пик — австрийский математик.

Родился 10.08. 1859 г. (Вена, Австрия)

Умер 26.07.1942 г. (Терезиенштадт, Богемия, ныне Чешская Республика)

В возрасти семнадцати лет опубликовал работу по математике. Его математическая работа была чрезвычайно обширной. 67 статей, написанные им, охватывали многие темы, например, линейная алгебра, интегральное исчисление, функциональный анализ, геометрия. Однако его лучше всего помнят по теореме Пика, которая появилась в его статье 1899 года «Геометрическая теория чисел», опубликованной в Праге.

Теорема Пика касается ретикулярной геометрии (лат. *reticulum* — сеточка). Плоскость становится решёткой при выборе двух систем параллельных равноотстоящих прямых линий на плоскости. Эти линии Пик называл «главными ретикулярными линиями», а их точки пересечения — «сетчатыми точками». (Рис. 7).

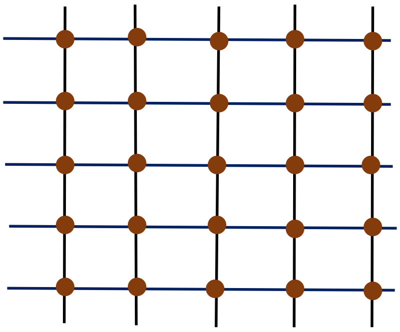


Рис. 7.

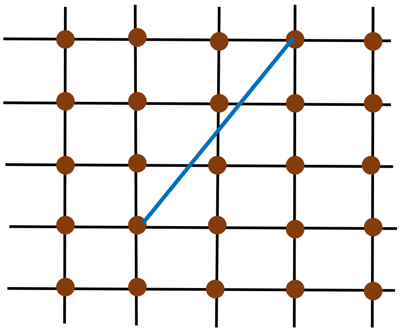


Рис. 8.

Линия, соединяющая любые две сетчатые точки, называется «ретикулярной линией» (рис. 8).

Главные ретикулярные линии также являются ретикулярными линиями.

Многоугольник, ребра которого являются ретикулярными линиями, Пик называл «ретикулярным многоугольником». (Рис. 9).

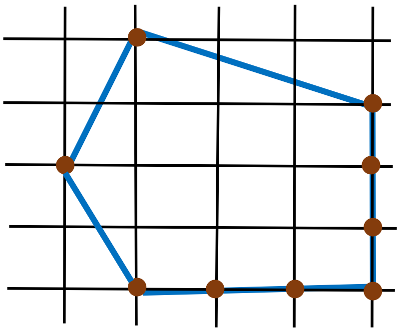


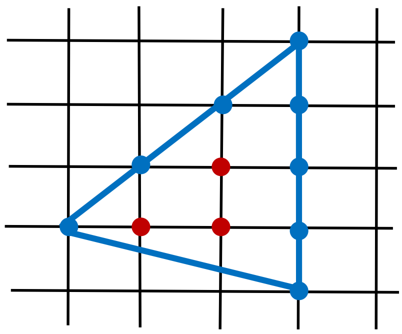
Рис. 9.

В школе вместо словосочетаний «сетчатые точки» используют «узлы решётки» или «целочисленные точки», то есть точки, имеющие целые координаты; «ретикулярный многоугольник» — «многоугольник с вершинами в узлах решётки».

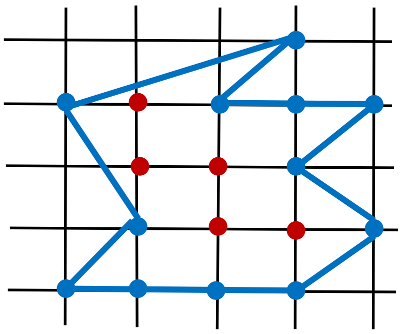
Теорема Пика. Площадь ретикулярного многоугольника равна

$$\boldsymbol{S = B + \frac{Г}{2} - 1},$$

где S — площадь многоугольника, В — количество сетчатых точек внутри многоугольника, Г — количество сетчатых точек на границе многоугольника .



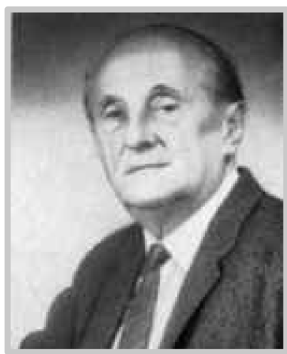
$$\left.\begin{array}{l} B = 3 \\ Г = 8 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boldsymbol{S = 3 + \frac{8}{2} - 1 = 6.}$$



$$\left.\begin{array}{l} B = 5 \\ Г = 12 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boldsymbol{S = 5 + \frac{12}{2} - 1 = 10.}$$

Важно: формула справедлива только для многоугольников, у которых вершины расположены в узлах решётки.

Результат не привлёк особого внимания после того, как Пик опубликовал его, но в 1969 году Хьюго Штейнхаус (польский математик) включил его в свою знаменитую книгу «Математический калейдоскоп» (см. библиотечка «Квант», 1981 г.). С тех пор теорема Пика привлекает большое



Хьюго Штайнхаус
1887 – 1972

внимание и восхищает своей простотой и элегантностью. Она применима не только для квадратной решётки, но и для любой бесконечной сетки, состоящей, например, из равных параллелограммов (рис. 10). Аналог формулы Пика существует и для треугольной решётки (рис. 11). Данные формулы можно посмотреть в журнале «Квантик» №8, 2021 г.

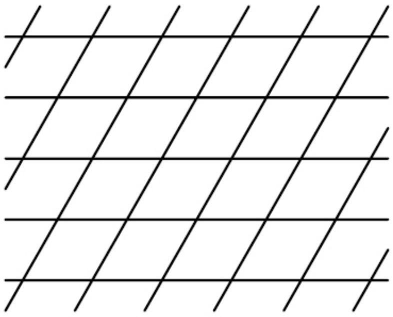


Рис. 10.

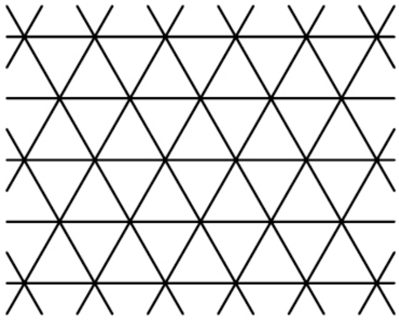


Рис. 11.

Докажем теорему Пика.

1) Рассмотрим прямоугольник со сторонами a и b, лежащими на линиях решётки. Для того чтобы получить общую формулу для количества внутренних и граничных точек, рассмотрим сначала два прямоугольника 3×2 и 6×3 (рис. 12 a, b).

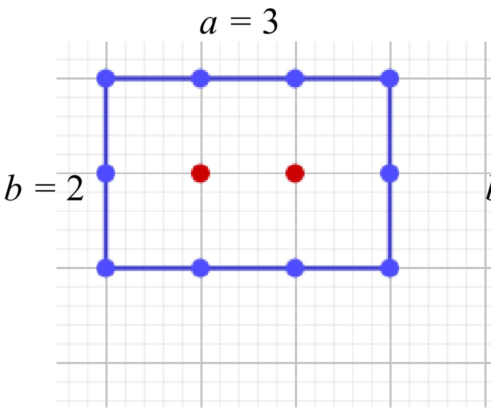


Рис. 12 a.

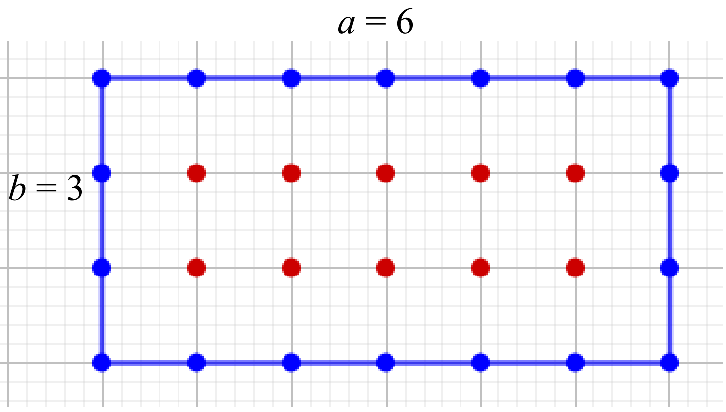


Рис. 12 b.

При подсчёте количества граничных точек важно вершины не включить дважды, так как каждая вершина принадлежит двум сторонам. Поскольку у прямоугольника сторон и вершин по четыре, то можно сопоставить каждой стороне одну вершину как показано на рисунке 13 a, b.

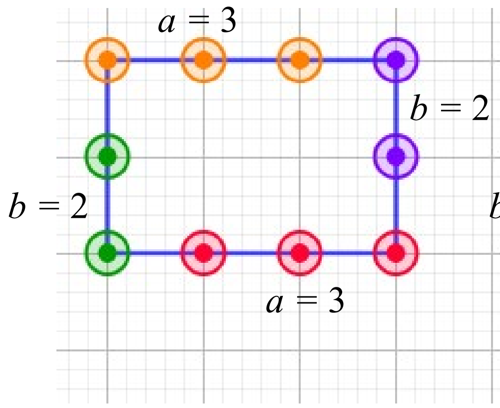


Рис. 13 *a*.

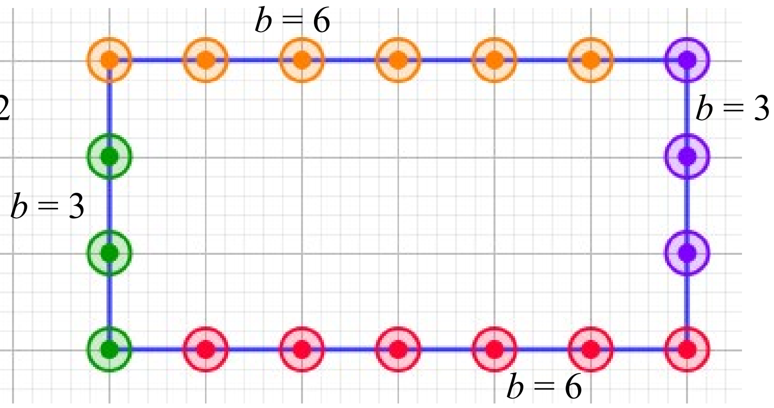


Рис. 13 *b*.

Из рисунка 13 видно, что количество граничных точек будет равно

рис. 13 *a*: $\boldsymbol{\Gamma = 2 \cdot (3 + 2)}$ рис. 13 *b*: $\boldsymbol{\Gamma = 2 \cdot (6 + 3)}$.

Следовательно, для произвольного прямоугольника со сторонами a и b количество граничных точек можно вычислить по формуле

$$\boldsymbol{\Gamma = 2 \cdot (a + b)}.$$

Заметим, что при подсчёте внутренних точек их количество в одном ряду на единицу меньше, чем длина прямоугольника (см. рис. 14).

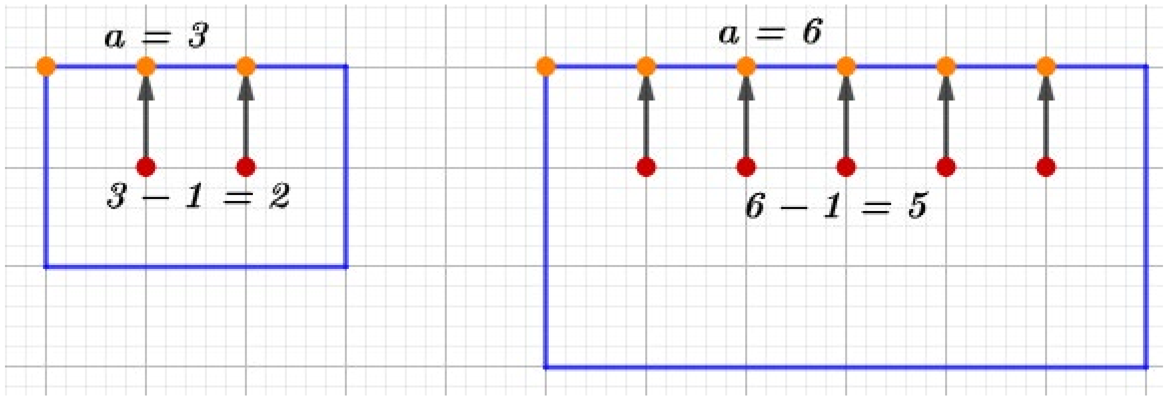


Рис. 14.

Зная ширину прямоугольника также легко подсчитать и количество рядов внутренних точек (см. рис. 15).

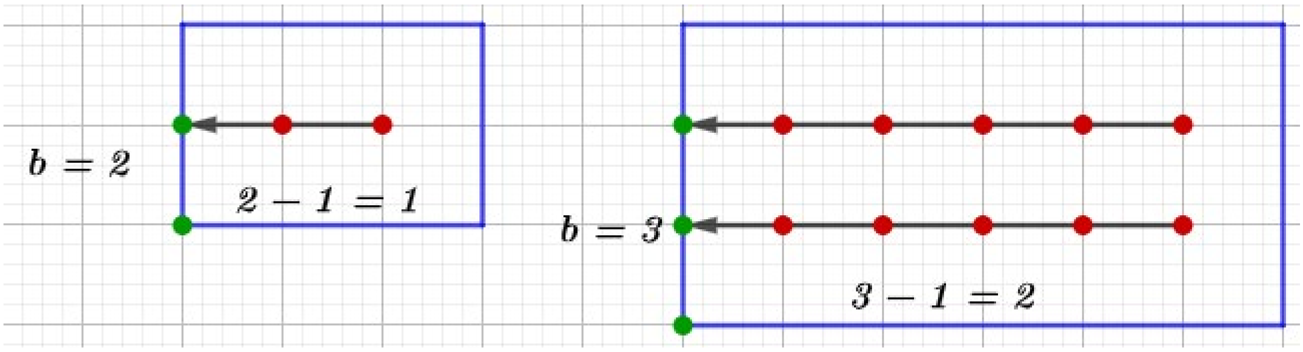


Рис. 15.

Следовательно, для произвольного прямоугольника со сторонами a и b количество внутренних точек можно вычислить по формуле

$$\boldsymbol{B = (a - 1) \cdot (b - 1).}$$

По формуле Пика,

$$\boldsymbol{S = B + \frac{\Gamma}{2} - 1 = (a - 1) \cdot (b - 1) + \frac{2 \cdot (a + b)}{2} - 1 =}$$

$$\boldsymbol{= a \cdot b - a - b + 1 + a + b = a \cdot b.}$$

Доказали, что для прямоугольника формула Пика имеет место.

2) Докажем теперь справедливость формулы Пика для прямоугольного треугольника с катетами a и b, лежащими на линиях решётки. Для обобщения вновь выберем два треугольника (рис. 16).

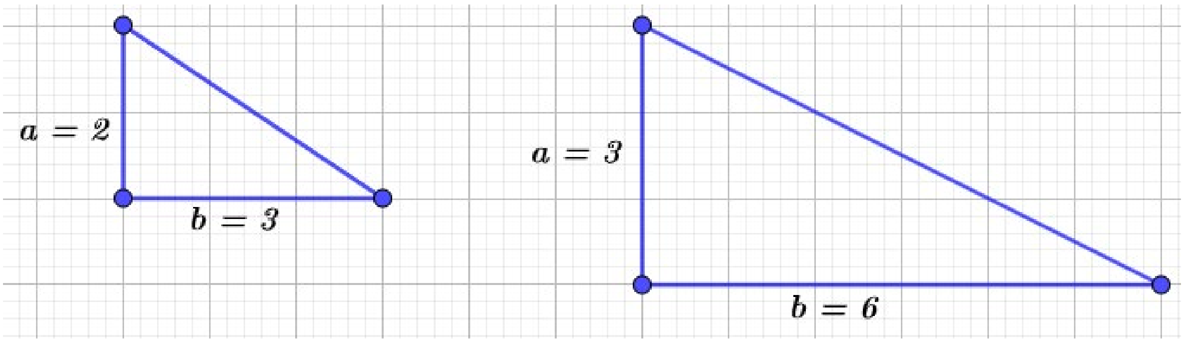


Рис. 16.

Достроим каждый треугольник до прямоугольника и посчитаем количество $\boldsymbol{c}$ целочисленных точек на гипотенузе, которая является диагональю в прямоугольнике (см. рис. 17).

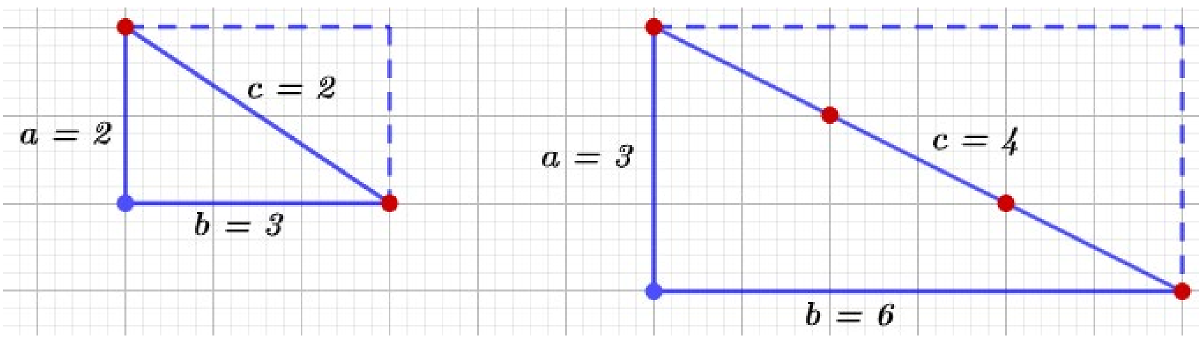


Рис. 17.

Тогда количество внутренних и граничных точек прямоугольного треугольника можно вычислить используя формулы, полученные выше, для прямоугольника.

Заметим, что среди целочисленных точек гипотенузы есть две граничные точки как для треугольника так и для прямоугольника, а также внутренние точки прямоугольника, которые являются граничными для треугольника (рис. 18).

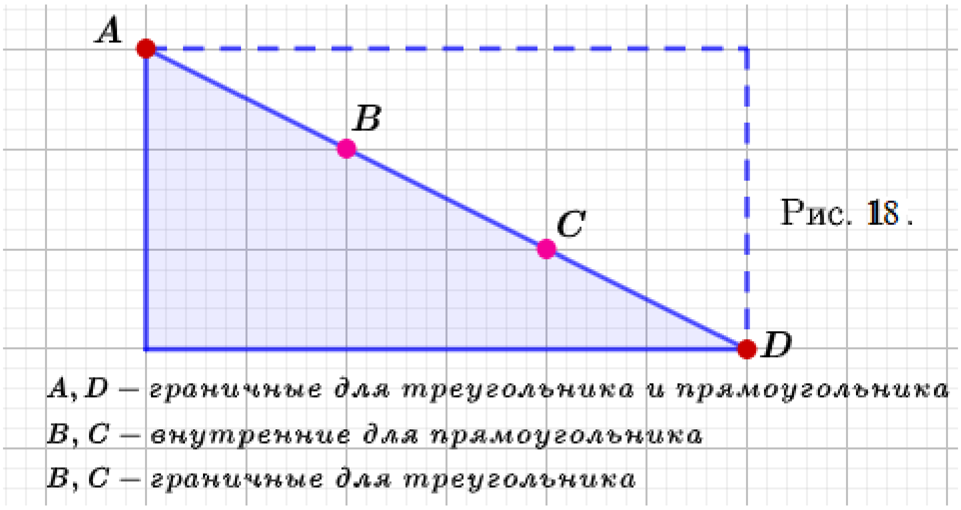


Рис. 18.

Найдём внутренние точки выбранных прямоугольных треугольников и запишем общую формулу.

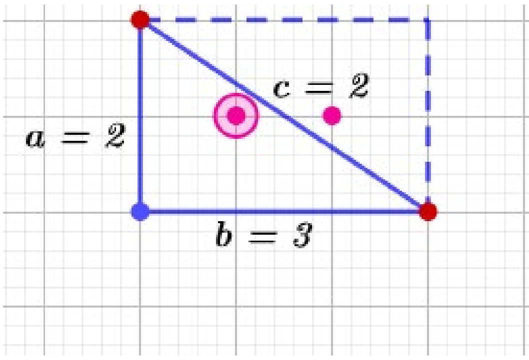


Рис. 19 *a*

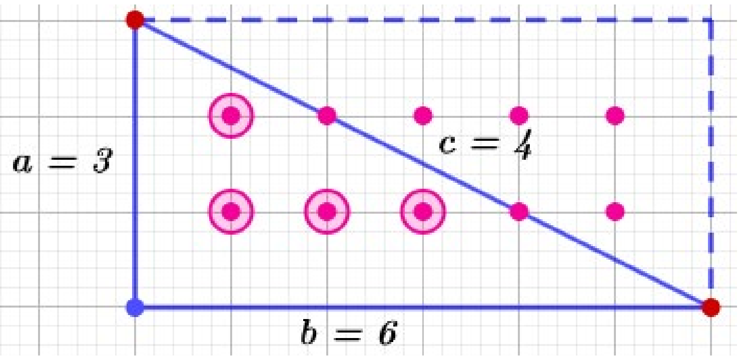


Рис. 19 *b*.

	Внутренние точки	*Общая формула*
Рис. 19 *a*	$B = \dfrac{(2-1)\cdot(3-1)-(2-2)}{2} = 1$	$\boldsymbol{B = \dfrac{(a-1)\cdot(b-1)-(c-2)}{2}}$
Рис. 19 *b*	$B = \dfrac{(3-1)\cdot(6-1)-(4-2)}{2} = 4$	

Отметим, что количество граничных точек прямоугольного треугольника равно сумме половины граничных точек прямоугольника и целочисленных точек гипотенузы без одной точки (красная точка в кружочке), которая считается дважды (рис. 20 *a*, *b*).

Найдём граничные точки выбранных прямоугольных треугольников и запишем общую формулу.

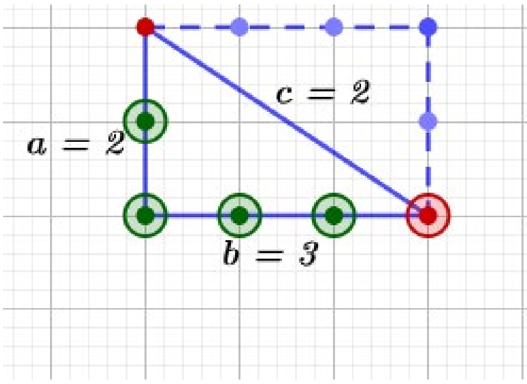


Рис. 20 *a*

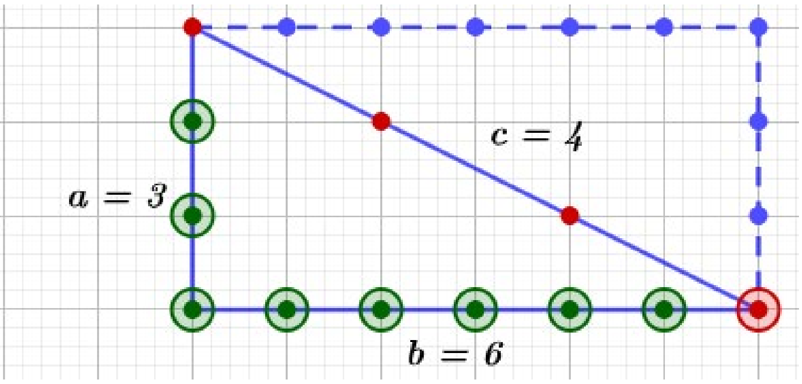


Рис. 20 *b*.

	Граничные точки	*Общая формула*
Рис. 20 *a*	$\Gamma = \frac{2\cdot(2+3)}{2} + 2 - 1 = 6$	$\Gamma = \frac{2\cdot(a+b)}{2} + c - 1$ $\boldsymbol{\Gamma = a+b+c-1}$
Рис. 20 *b*	$\Gamma = \frac{2\cdot(3+6)}{2} + 4 - 1 = 12$	

Запишем формулу Пика

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{B} + \frac{\boldsymbol{\Gamma}}{\mathbf{2}} - \mathbf{1} = \frac{(\boldsymbol{a}-\mathbf{1})\cdot(\boldsymbol{b}-\mathbf{1}) - (\boldsymbol{c}-\mathbf{2})}{\mathbf{2}} + \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \mathbf{1} =$$

$$= \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \mathbf{1} - \boldsymbol{c} + \mathbf{2} + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} - \mathbf{1} - \mathbf{2}}{\mathbf{2}} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\mathbf{2}}.$$

Доказали, что формула справедлива и для прямоугольного треугольника.

3) Для произвольного треугольника формула Пика также верна, так как, например, треугольник *ECF* можно получить из прямоугольника *ABCD* отрезав прямоугольные треугольники *AEF, EBC, CDF* (рис. 21). Поскольку и для *ABCD*, и для *AEF, EBC, CDF* эта формула имеет место, то она будет справедлива и для произвольного треугольника *ECF*.

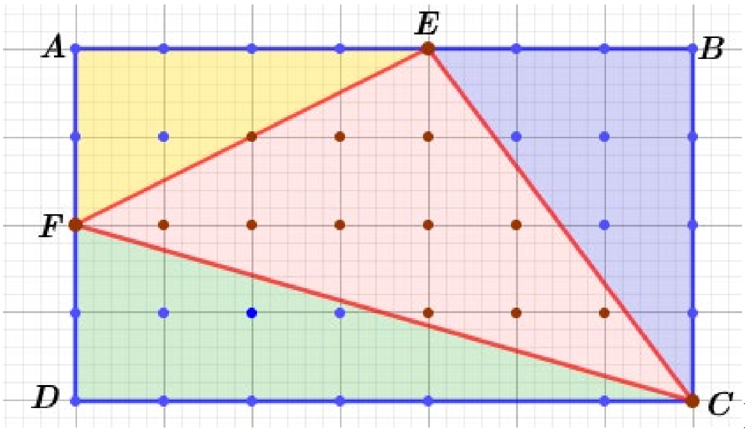


Рис. 21.

Проверим справедливость формулы для произвольного треугольника *ECF* на рисунке 21. Найдём его площадь по формуле Пика*:*

$$\boldsymbol{B = 10, \qquad \Gamma = 4}$$

$$\mathbf{S_{ECF}} = \boldsymbol{B + \frac{\Gamma}{2} - 1 = 10 + \frac{4}{2} - 1 = 11.}$$

Вычислим площадь треугольника *ECF,* используя свойства площадей (второй способ):

$$\mathbf{S_{ECF}} = \mathbf{S_{ABCD}} - (\mathbf{S_{AEF}} + \mathbf{S_{EBC}} + \mathbf{S_{CDF}}) = \mathbf{7 \cdot 4} - \left(\frac{\mathbf{2 \cdot 4}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{3 \cdot 4}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{7 \cdot 2}}{\mathbf{2}}\right) = \mathbf{11.}$$

Получили равные результаты.

4) Докажем справедливость формулы Пика для многоугольника. Заметим, что любой многоугольник можно разбить на произвольные треугольники (рис. 22). Рассмотрим *ABC* и *BCD* два произвольных треугольника с общей стороной *BC* (рис. 23), для которых, как доказано выше, формула Пика верна.

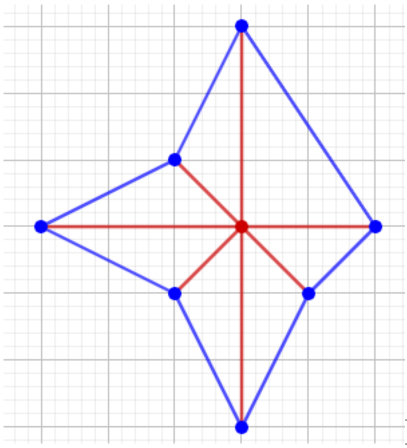


Рис. 22.

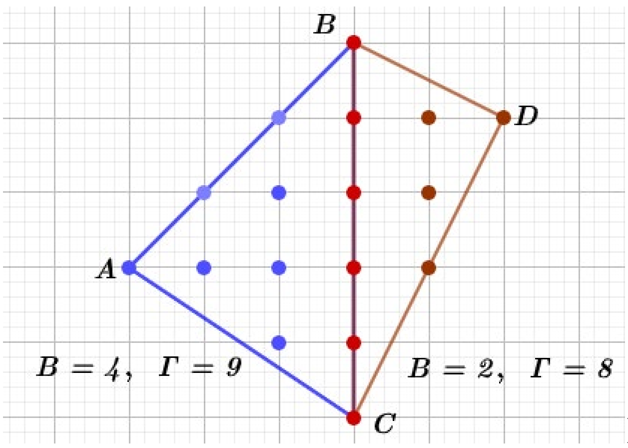


Рис. 23.

Докажем, что формула Пика будет верна для произвольного четырёхугольника $ABDC$. Так как треугольники имеют общую сторону BC, то

а) все целочисленные точки, лежащие на этой стороне, кроме двух вершин, становятся внутренними точками четырёхугольника, а две вершины B и C будут граничными точками;

б) сумма граничных точек двух треугольников ABC и BCD содержит удвоенное количество целочисленных точек общей стороны BC, являющихся внутренними, кроме двух вершин B и C.

Обозначим c − количество целочисленных точек общей стороны.

	Внутренние точки	*Граничные точки*
Рис. 23	$В = 4 + 2 + (6 - 2) = 10$	$Г = 9 + 8 - 2 \cdot 6 + 2 = 7$
Общая формула	$\boldsymbol{В_{ABDC} = В_{ABC} + В_{ADC} + (c - 2)}$	$\boldsymbol{Г_{ABDC} = Г_{ABC} + Г_{ADC} - 2c + 2}$

Составим формулу Пика для произвольного четырёхугольника $ABDC$

$$\boldsymbol{S_{ABDC}} = В_{ABDC} + \frac{Г_{ABDC}}{2} - 1 =$$

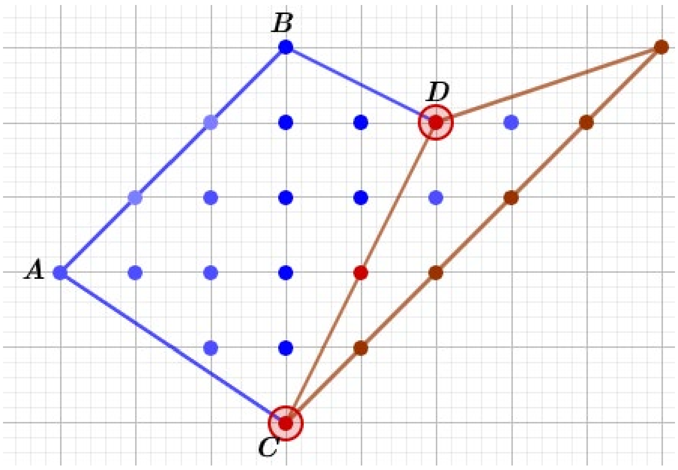
$$= В_{ABC} + В_{ADC} + (c - 2) + \frac{Г_{ABC} + Г_{ADC} - 2c + 2}{2} - 1 =$$

$$= В_{ABC} + В_{ADC} + \frac{Г_{ABC}}{2} + \frac{Г_{ADC}}{2} + c - 2 - c + 1 - 1 =$$

$$= \left(В_{ABC} + \frac{Г_{ABC}}{2} - 1\right) + \left(В_{ADC} + \frac{Г_{ADC}}{2} - 1\right) = \boldsymbol{S_{ABC} + S_{ADC}}.$$

Согласно свойствам площадей плоских фигур формула Пика верна для произвольного четырёхугольника.

Присоединяя к произвольному четырёхугольнику различные треугольники и рассуждая аналогично, можно доказать, что формула Пика верна для любого многоугольника (рис. 24). ■



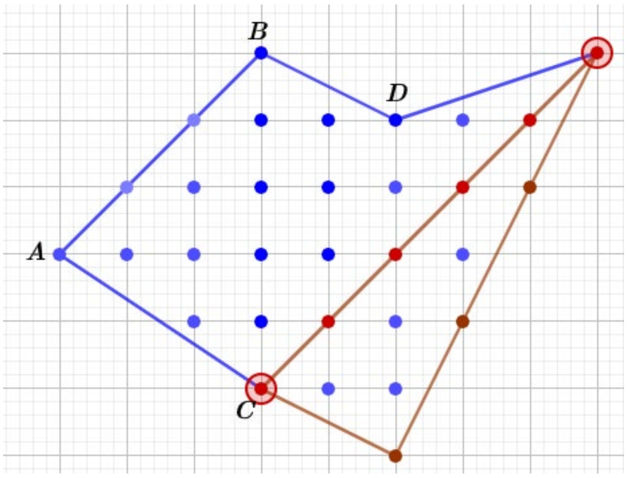
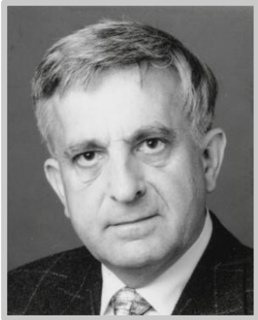


Рис. 24.

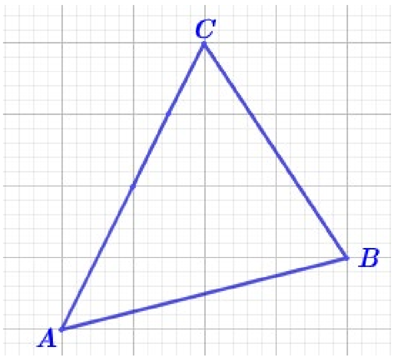


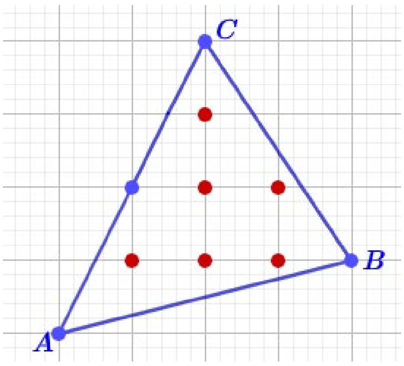
Кристиан Блаттер
1935 - 2021 гг.

Формула Пика имеет много различных доказательств, но большинство из них не такие простые. В 1997 году швейцарский математик Кристиан Блаттер для доказательства предложил мысленный эксперимент с тающим льдом, который сразу объясняет формулу Пика. С ним можно познакомиться в журнале «Квантик» №9, 2018 г.

Однако простая и красивая формула Пика плохо обобщается на высшие размерности. Наглядно показал это Рив, предложив в 1957 г. рассмотреть тетраэдр (называемый теперь тетраэдром Рива). Тем не менее, некоторое подобное обобщение на пространства большей размерности всё же имеется, — это многочлены Эрхарта.

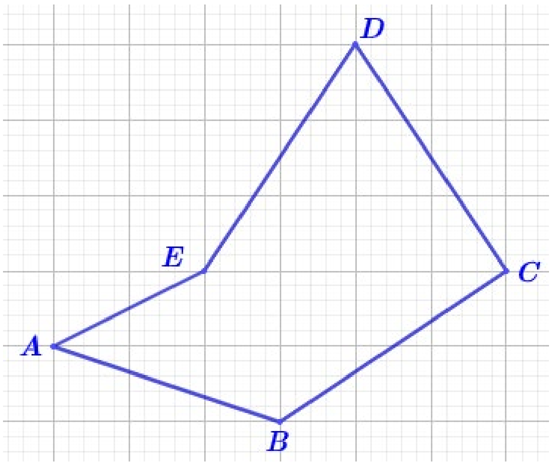
Вернёмся к рисункам 5 и 6, и найдём площади фигур с помощью формулы Пика.

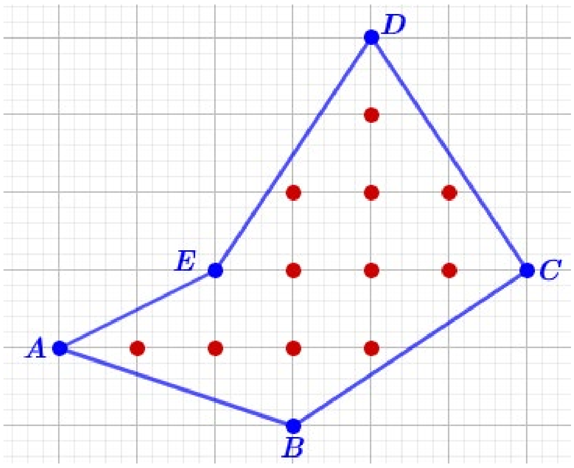




$S_{ABC} = 7$

$S_{ABC} = 6 + \frac{4}{2} - 1 = 7.$



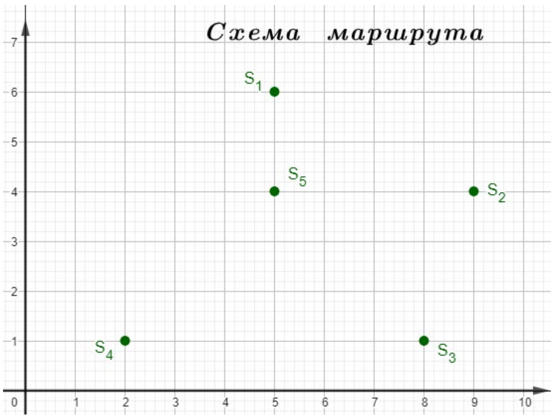


$S_{ABCDE} = 12{,}5$ $\quad\quad$ $S_{ABCDE} = 11 + \frac{5}{2} - 1 = 12{,}5.$

2 Разбор демонстрационного варианта

Задание (*базовый уровень сложности*)**.**

С помощью рации пять базовых станций, отмеченных на схеме точками, обеспечивают связь туристов на маршруте с поисково-спасательным подразделением МЧС. Вычислите площадь зоны действия станции S_5, если туриста обслуживает ближайшая к нему станция.



Решение. По условию задачи турист обслуживается ближайшей к нему станцией. Для определения такой станции вспомним некоторые понятия из курса геометрии.

Серединным перпендикуляром к отрезку MN называется прямая ℓ, проходящая через его середину и перпендикулярная ему (рис. 25).

Свойство (серединного перпендикуляра как ГМТ). Геометрическое место точек (D, E, F и др.), равноудалённых от концов отрезка MN, есть серединный перпендикуляр к этому отрезку (рис. 26).

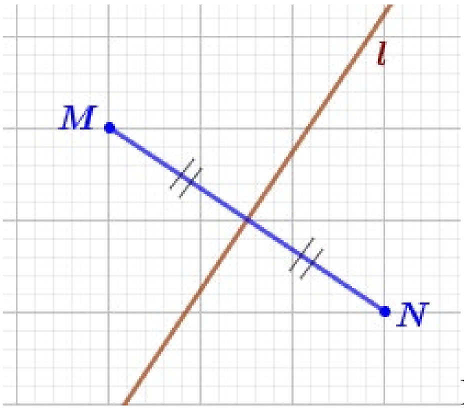


Рис. 25.

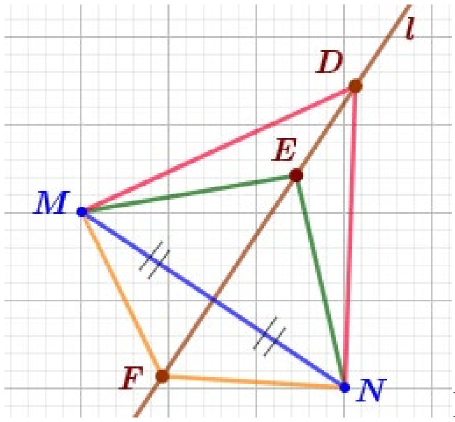


Рис. 26.

Следовательно, если в точках M и N расположить станции, то турист, находясь в нижней полуплоскости относительно границы ℓ, будет обслуживаться станцией N, в верхней полуплоскости − станцией M.

Напомним из школьного курса, как выбрать нужную полуплоскость.

Как известно, на координатной плоскости линейное уравнение вида

$$ax + by + c = 0$$

задаёт прямую (рис. 27 *a*). Линейные неравенства

$$ax + by + c \leq 0 \qquad \text{или} \qquad ax + by + c \geq 0$$

задают соответствующие полуплоскости с границей $ax + by + c = 0$ (рис. 27 *b*).

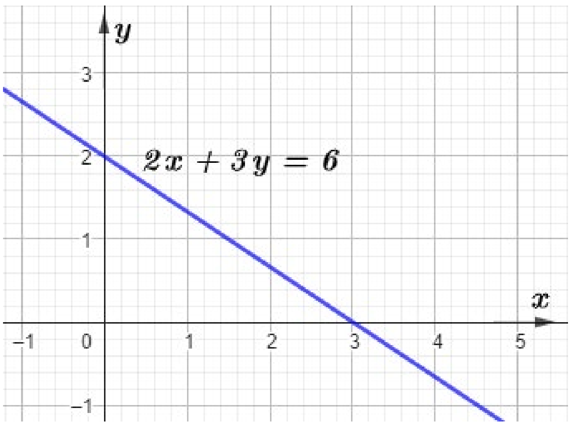


Рис. 27 *a*.

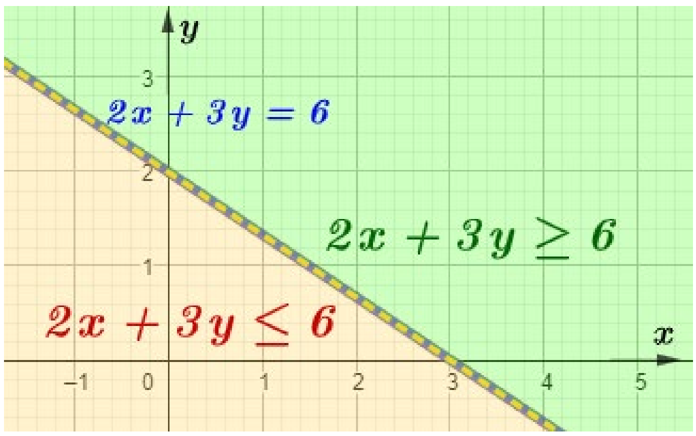


Рис. 27 *b*.

Для того, чтобы выбрать полуплоскость, сначала нужно нарисовать её границу − прямую (рис. 27 *a*), затем выбрать полуплоскость, которая соответствует неравенству. Для этого можно выбрать точку, не лежащую на прямой, и подставить её координаты в неравенство. Если неравенство будет верным, значит, выбираем полуплоскость, которая содержит выбранную точку, если неравенство неверное, то выбираем другую полуплоскость. Например, на рисунке 27 b $O(0;0) \notin \ell$, ℓ: $2x + 3y = 6$. Подставив координаты точки O в неравенство $2x + 3y \leq 6$, получим $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 6$ верное неравенство, значит выбираем нижнюю полуплоскость (рис. 28).

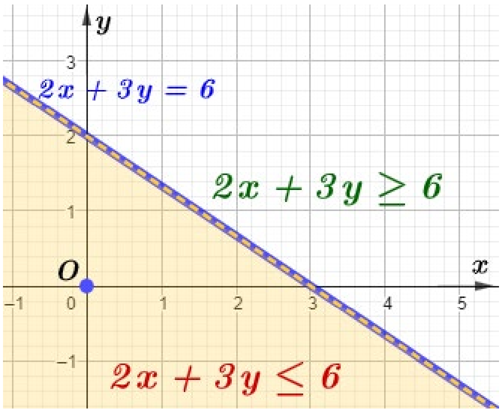


Рис. 28.

С учётом выше сказанного, перейдём к решению задания. Для нахождения площади зоны действия станции S_5 сначала необходимо изобразить фигуру, площадь которой необходимо найти. Для этого соединим точку S_5 со всеми остальными точками S_1, S_2, S_3, S_4 и построим серединные перпендикуляры l_1, l_2, l_3, l_4 к каждому из отрезков S_1S_5, S_2S_5, S_3S_5, S_4S_5 (рис. 29).

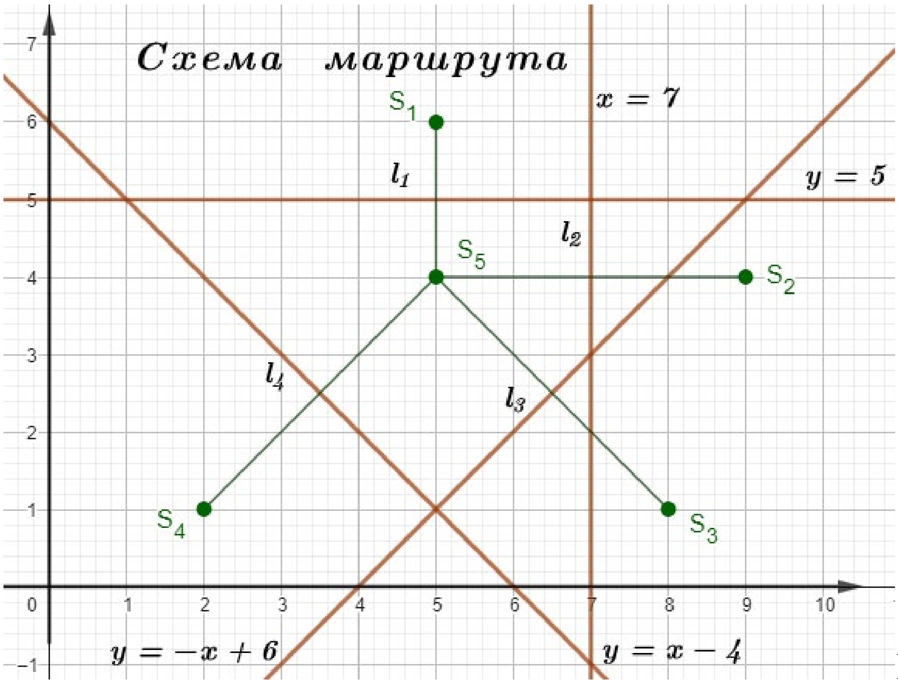


Рис. 29.

Далее относительно каждого серединного перпендикуляра необходимо выбрать полуплоскость, содержащую точку S_5. Для этого найдём уравнения серединных перпендикуляров. Уравнения l_1 и l_2 легко выписать $y = 5$, $x = 7$.

Составим уравнение l_3. Зная координаты точек $S_3(8;\ 1)$ и $S_5(5;\ 4)$, можно найти уравнение прямой S_3S_5:

1. $\begin{cases}1 = k \cdot 8 + b \\ 4 = k \cdot 5 + b\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}k = -1 \\ b = 9\end{cases} \Longrightarrow$ (S_3S_5): $y = -x + 9$.

2. Координаты середины отрезка S_3S_5 $\left(\frac{8+5}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{13}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

3. l_3.: $\begin{cases}\ell_3 \perp (S_3S_5) \\ \left(\frac{13}{2}, \frac{5}{2}\right) \in \ell_3\end{cases} \Longrightarrow y = x - 4$.

Аналогично рассуждая, находим уравнение l_4.: $y = -x + 6$.

Подставляя координаты, например, точки O(0,0), определим полуплоскости, содержащие точку S_5, относительно каждого серединного перпендикуляра. Получим четырёхугольник *ABCD* (рис. 30).

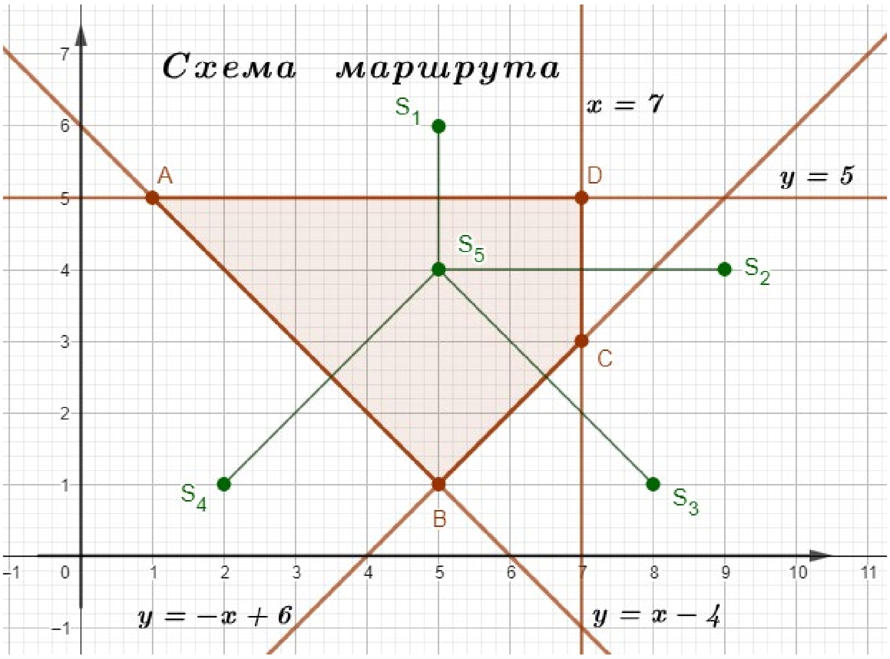


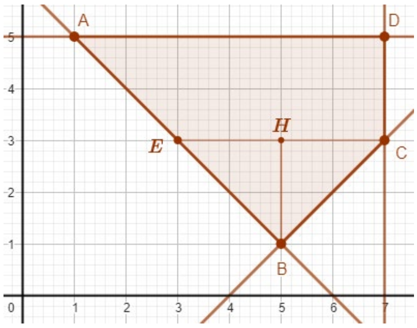
Рис. 30.

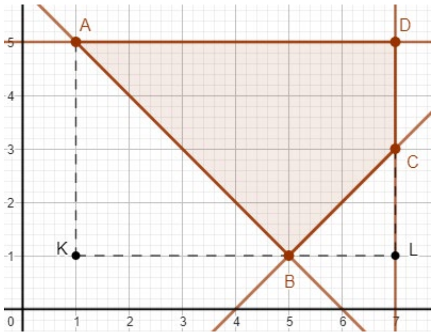
Площадь *ABCD* можно найти разными способами.

1) $S = S_{BCE} + S_{CEAD} = \frac{1}{2} \cdot EC \cdot BH + \frac{EC+AD}{2} \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 + \frac{4+6}{2} \cdot 2 = \mathbf{14}$ (рис. 31 *a*).

2) $S = S_{ADLK} - S_{ABK} - S_{BCL} = AK \cdot AD - \frac{AK \cdot KB}{2} - \frac{BL \cdot LC}{2} = 4 \cdot 6 - \frac{4 \cdot 4}{2} - \frac{2 \cdot 2}{2} = \mathbf{14}$ (рис. 31 *b*).

3) $S = B + \frac{Г}{2} - 1 = 8 + \frac{14}{2} - 1 = \mathbf{14}$ (рис. 31 *c*).





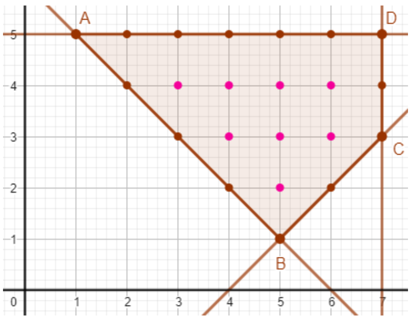


Рис. 31*a* Рис. 31*b*. Рис. 31*c*.

Ответ: 14

3 Наибольшее и наименьшее значения функции

3.1 Основные понятия

Функцией называется правило, по которому каждому значению x ставится в соответствие единственное значение y. При этом x называется *независимой переменной* (аргументом), y − *зависимой переменной* (значением функции).

$$f: x \longrightarrow y \qquad \text{или} \qquad y = f(x).$$

Областью определения функции $D(y)$ называется множество всех допустимых значений независимой переменной x.

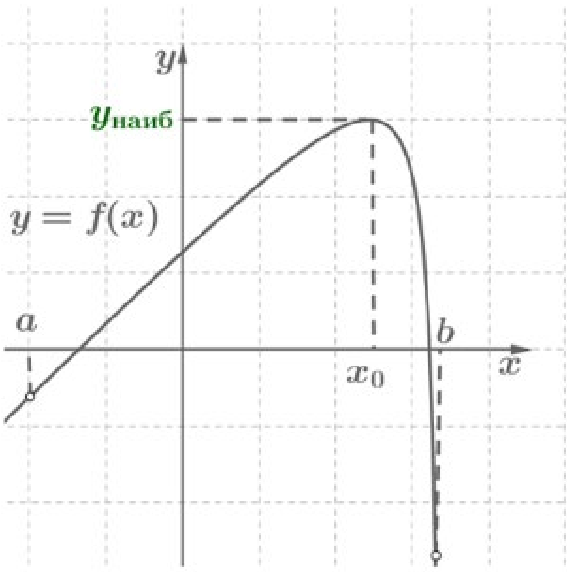
Областью значения функции $\mathrm{E}(y)$называется множество всех допустимых значений зависимой переменной y.

С понятием множества значений функции связаны понятия наибольшего и наименьшего значений функции.

Про функции $y = f(x)$ говорят, что она принимает на области определения $D(y)$ *наибольшее значение* в точке x_o, если $f(x_o) \geq f(x)$ для всех $x \in D(y)$ (рис. 32).

Про функции $y = f(x)$ говорят, что она принимает на области определения $D(y)$ *наименьшее значение* в точке x_o, если $f(x_o) \leq f(x)$ для всех $x \in D(y)$ (рис. 32).

Наименьшее и наибольшее значения функции, если они существуют, можно определить по графику функции или используя свойства функции, или с помощью производной функции.



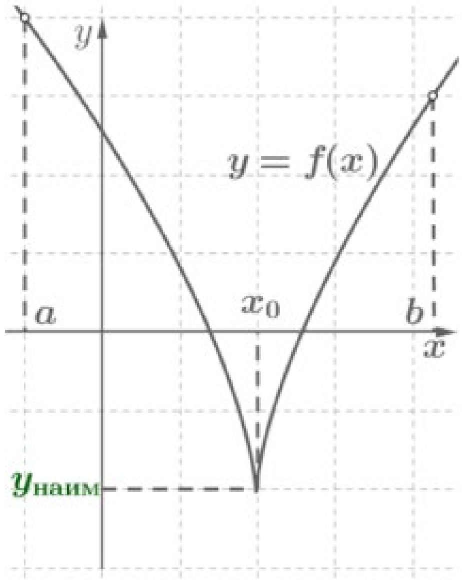


Рис. 32.

3.2 Функция «целой и дробной части числа»

Целой частью $[x]$ *действительного числа* x называется наибольшее целое число n, не превосходящее x, то есть $n \leq x$.

Итак, $[x] = n, \quad n \leq x < n + 1$

для любого фиксированного целого числа n. Символ $[x]$ был введён немецким математиком Гауссом в 1808г.

Например, [0,6] = 0; [5] = 5; [3,4] = 3; [- 1,7] = -2; [-8] = 8.

Карл Фридрих Гаусс
30.04.1777 - 23.02.1855

Таким образом, можно задать функцию:

$$f\colon\ x \to [x] \qquad f(x) = [x].$$

Простейшие свойства функции $f(x) = [x]$.

1) Область определения функции есть множество всех действительных чисел R.
2) Область значений функции есть множество всех целых чисел Z.
3) График функции кусочно − постоянный.
4) Функция неубывающая, т.е. для любых x_1 и x_2, $x_1 \leq x_2$ имеет место неравенство $[x_1] \leq [x_2]$.
5) Для любого целого числа n и любого действительного числа x выполняется равенство: $[x + n] = [x] + n$.
6) $[- x] = - [x] - 1$, где x – нецелое действительное число.

С учётом свойств график функции $y = [x]$ будет иметь вид (рис. 33).

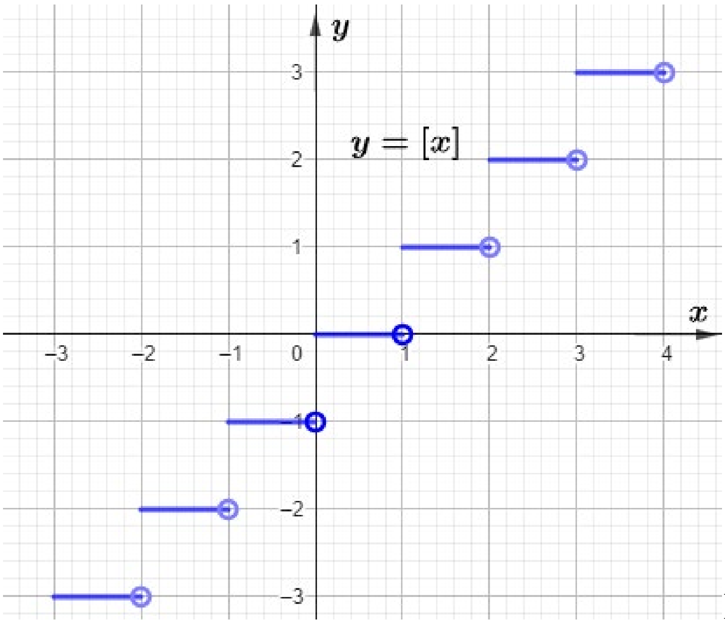


Рис. 33.

Дробной частью $\{x\}$ *действительного числа* x называется число $\{x\} = x - [x]$.

Например: $\{0\} = 0 - [0] = 0$;

$\{4\} = 4 - \{4] = 0$;

$\{7{,}2\} = 7{,}2 - [7{,}2] = 7{,}2 - 7 = 0{,}2$;

$\{-1{,}8\} = -1{,}8 - [-1{,}8] = -1{,}8 - (-2) = 0{,}2$;

$\{-2{,}3\} = -2{,}3 - [-2{,}3] = -2{,}3 - (-3) = 0{,}7$.

Таким образом, можно задать функцию:

$$f\colon\ x \to \{x\} \qquad\qquad f(x) = \{x\}.$$

Простейшие свойства функции $f(x) = \{x\}$.

1.Область определения функции есть множество всех действительных чисел R.

2.Область значений функции есть полуинтервал [0;1).

3.Для любого целого числа n и любого действительного числа x выполняется равенство: $\{x + n\} = \{x\}$, т.е. функция – периодическая с основным периодом, равным единице.

4. $\{-x\} = 1 - \{x\}$, где x – нецелое действительное число.

С учётом свойств график функции $y = \{x\}$ будет иметь вид (рис. 34).

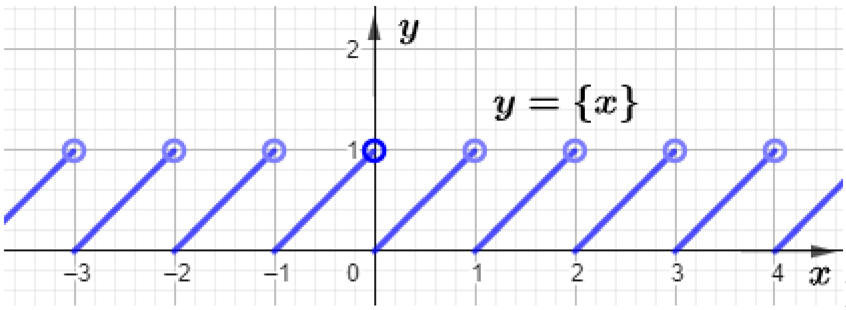


Рис. 34.

3.3 Построение графика функции $y = [f(x)]$.

Заметим, что согласно определению функции $y(x) = [x]$ значения y − целые числа. Следовательно для построения графика функции $y = [f(x)]$ можно составить следующий алгоритм действий:

1) Построить график функции $y = f(x)$ (рис. 35 *a*).

2) Построить прямые $y = n,\ n \in Z$ (рис. 35 *b*).

3) Заметим, что если $n \le y < n + 1$, то выполняется равенство $[y] = n$. Следовательно, для построения графика функции $y = [f(x)]$ в каждой полосе между прямыми $y = n$ и $y = n + 1$ нужно построить проекцию части графика, расположенной в этой полосе, на прямую $y = n$ (рис. 35 *c*).

4) На рисунке 35 *d* изображён график функции $y = [f(x)]$.

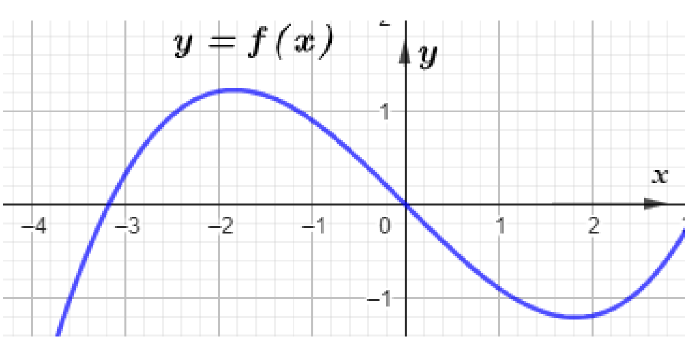


Рис. 35 *a*.

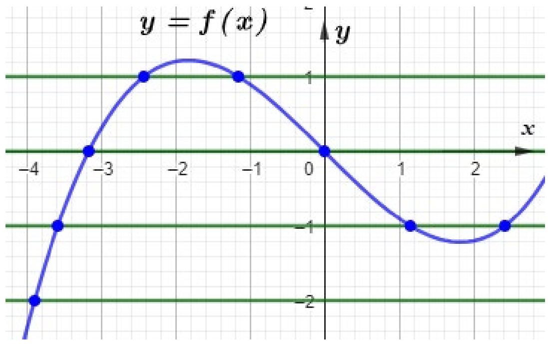


Рис. 35 *b*.

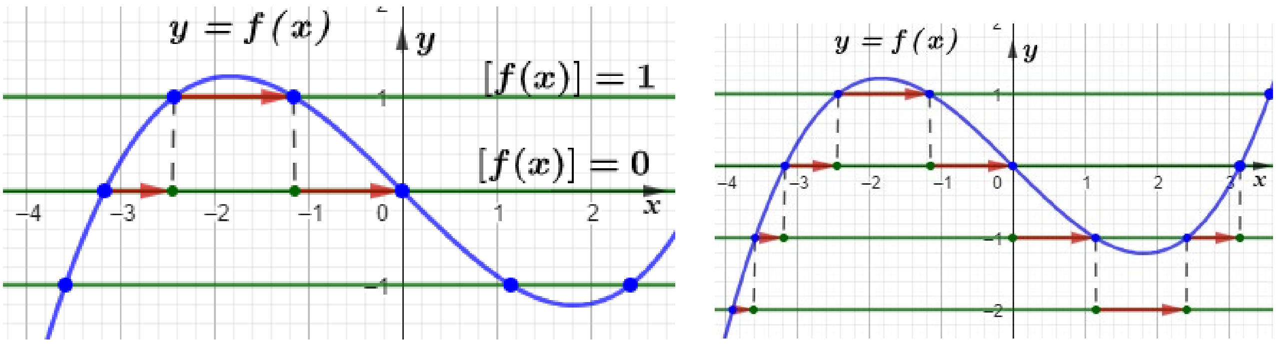


Рис. 35 *c*.

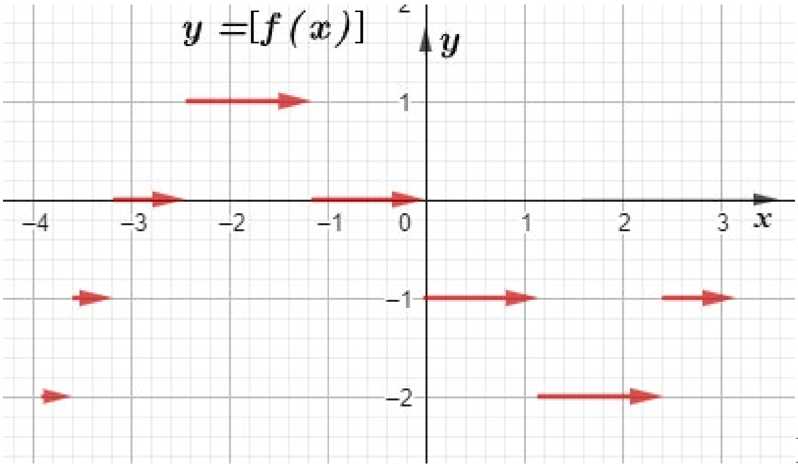


Рис. 35 *d*.

3.4 Построение графика функции $y = f([x])$.

Заметим, что так как $[x] \in Z$, то функция $y(x) = f([x])$ − функция целого аргумента. Следовательно для построения графика функции $y = f([x])$ можно составить следующий алгоритм действий:

1) Построить график функции $y = f(x)$.

2) Построить прямые $x = n,\ n \in Z$ (рис. 36 *a*).

3) Построить прямые $y = f(n),\ n \in Z$ (рис. 36 *b*).

4) Если $n \leq x < n + 1$, то выполняется равенство $[x] = n$. Значит для построения графика функции $y = f([x])$ в каждой полосе между прямыми $x = n$ и $x = n + 1$ нужно построить проекцию части графика, расположенной в этой полосе, на прямую $y = f(n)$ (рис. 36 *c*).

5) На рисунке 36 *d* изображён график функции $y = f([x])$.

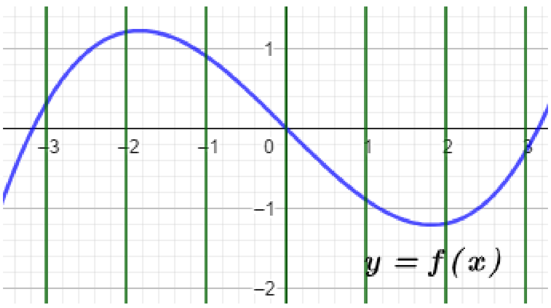


Рис. 36 *a*.

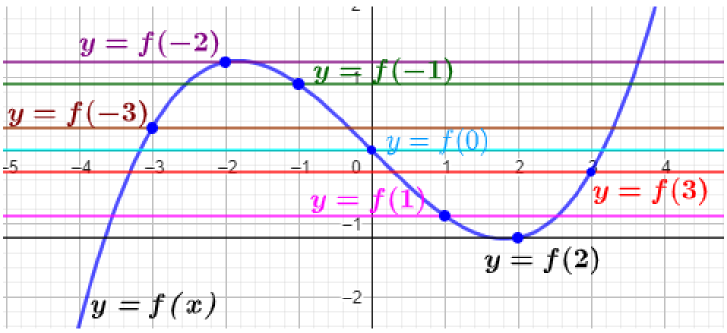
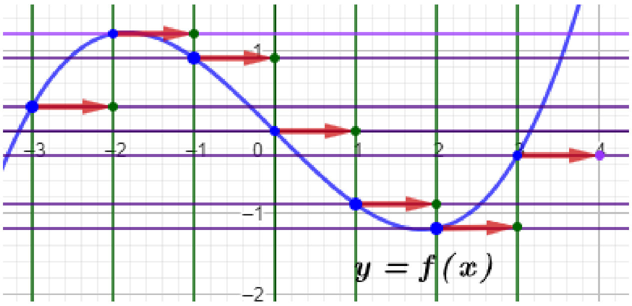


Рис. 36 *b*.



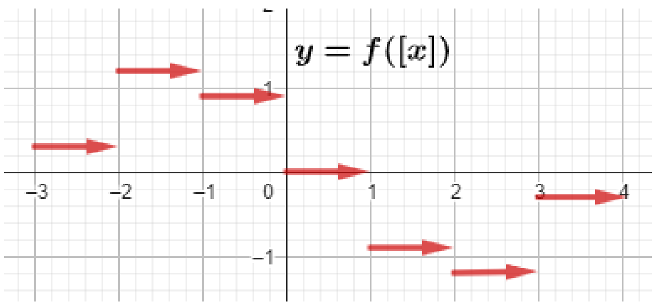


Рис. 36 *c*.

Рис. 36 *d*.

3.5 Построение графика функции $y = \{f(x)\}$.

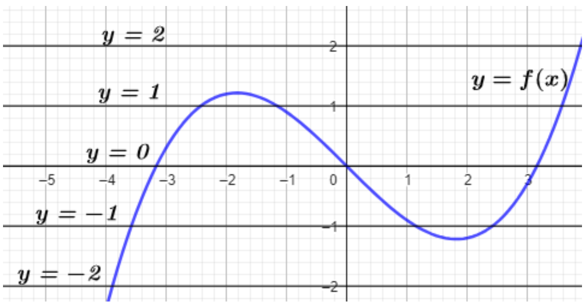
Заметим, что так как область значения функции $E(\{f(x)\}) = [0; 1)$, то для построения графика функции $y = \{f(x)\}$ можно составить следующий алгоритм действий:

1) Построить график функции $y = f(x)$.

2) Построить прямые $y = n,\ n \in Z$ (рис. 37 *a*).

3) Поскольку $y = \{f(x)\} = f(x) - [f(x)]$, то для построения графика функции $y = \{f(x)\}$ часть графика, расположенную в полосе между прямыми $y = n$ и $y = n + 1$, нужно параллельно сместить вдоль оси ОУ на величину $-[f(x)]$, то есть если $f(x) > 0$, то вниз, если $f(x) < 0$, то вверх (рис. 37 *b*). График функции $y = \{f(x)\}$ должен располагаться в полосе $0 \le y < 1$.

4) На рисунке 37 *c* изображён график функции $y = \{f(x)\}$.



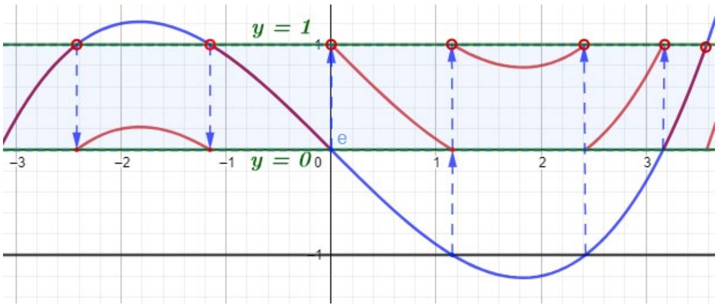


Рис. 37 *a*.

Рис. 37 *b*.

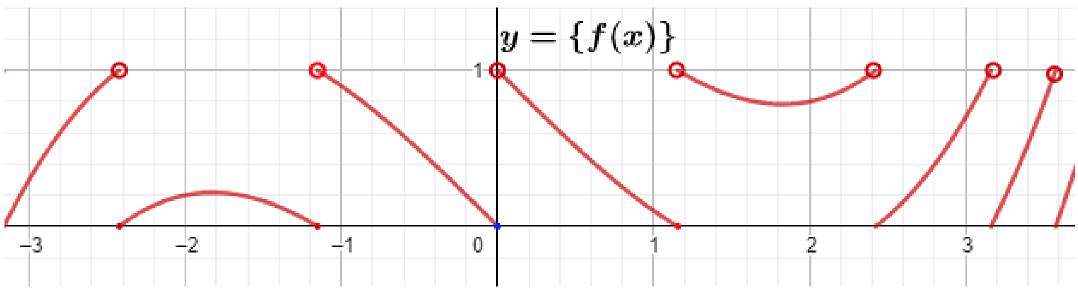


Рис. 37 *c*.

3.6 Построение графика функции $y = f(\{x\})$.

Заметим, так как $\begin{cases} \{x\} = x - [x] \\ \{x\} \in [0;1) \end{cases}$, то при $x \in [0;1)$ $f(\{x\}) = f(x)$, то есть функция $y = f(\{x\})$ периодическая с периодом Т = 1. Следовательно, для построения графика функции $y = f(\{x\})$ можно составить следующий алгоритм действий:

1) Построить график функции $y = f(x)$ на отрезке [0; 1] (рис. 38 *a*).

2) Повторить график из п.1 на всю область определения функции (рис. 38 *b*).

3) На рисунке 38 *c* изображён график функции $y = f(\{x\})$.

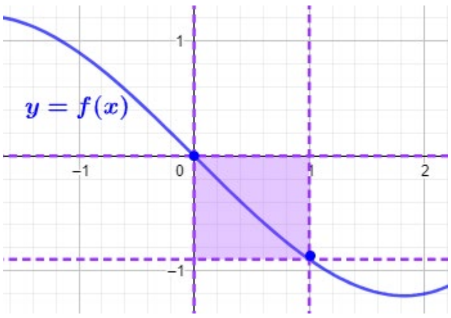


Рис. 38 *a*.

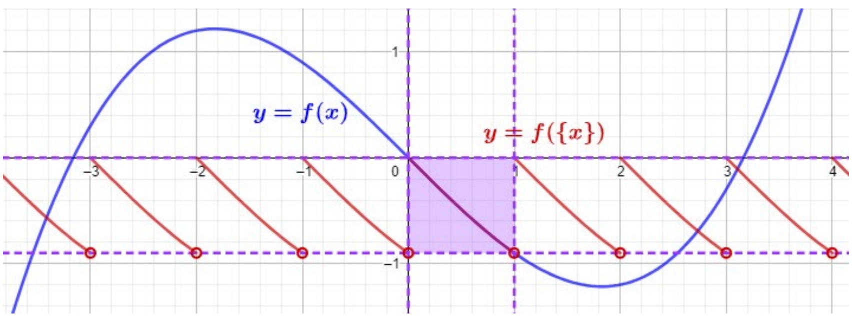


Рис. 38 *b*.

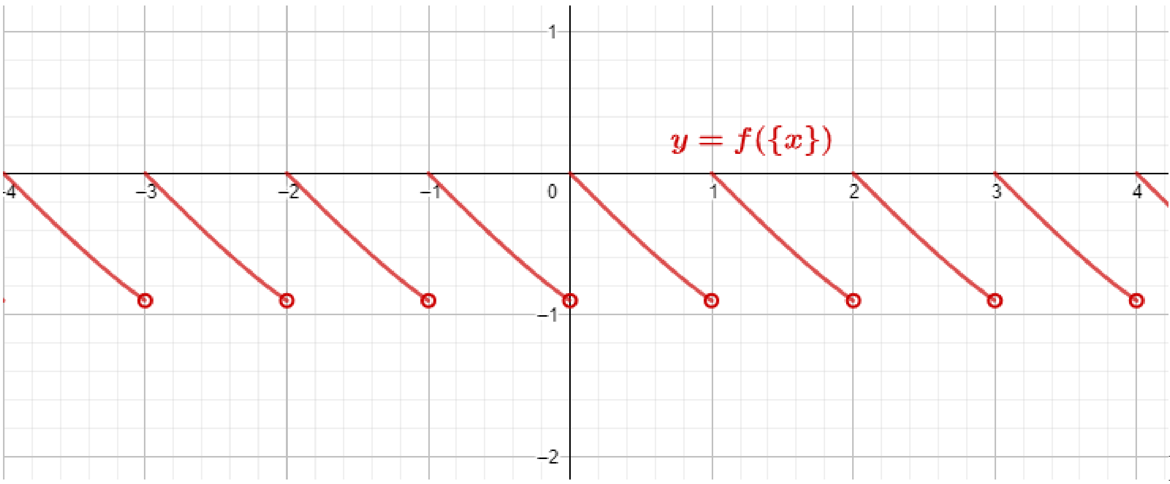


Рис. 38 *c*.

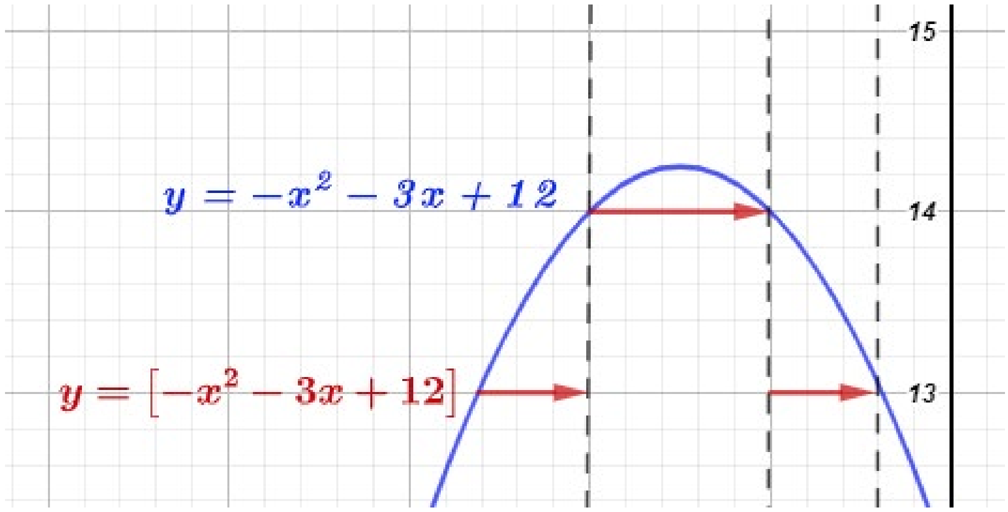
4 Разбор демонстрационного варианта

Задание (повышенной сложности). Найдите сумму наибольших значений функций

$$y(x) = [-x^2 - 3x + 12] \quad \text{и} \quad y(x) = -\{x\}^2 - 3\{x\} + 12,$$

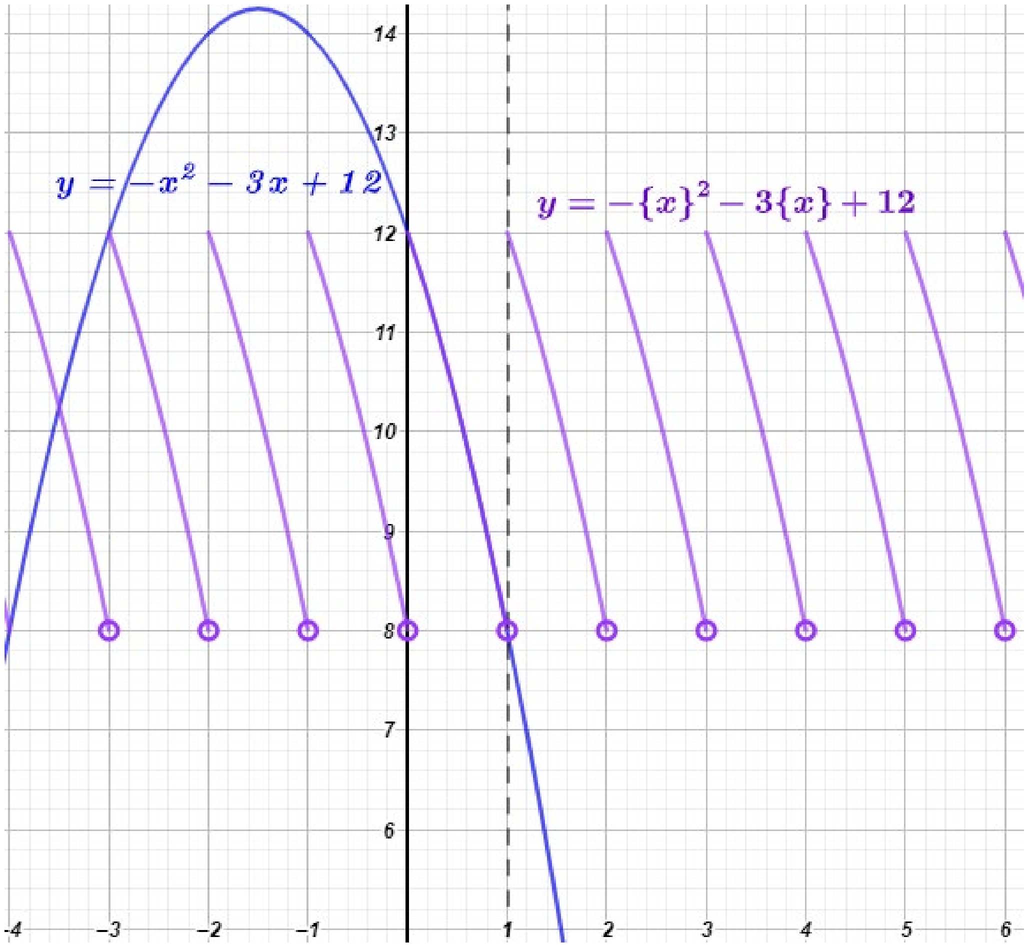
где $[x]$ – целая часть числа, $\{x\}$ – дробная часть числа.

Решение. Изобразим схематично график функции $y(x) = [-x^2 - 3x + 12]$.



Наибольшее значение функции $y(x) = [-x^2 - 3x + 12]$ равно 14.

Изобразим схематично график функции $y(x) = -\{x\}^2 - 3\{x\} + 12$.



Наибольшее значение функции $y(x) = -\{x\}^2 - 3\{x\} + 12$ равно 12.

Сумма наибольших значений функций $12 + 14 = 26$.

Ответ. 26

Заключение

В методических рекомендациях для подготовки к выполнению конкурсных заданий по математике теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» в номинации «*Кадетский класс*» по направлению «Защита населения и территорий от чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера (МЧС)», ВКС, СВ, ПВО, РВСН, ВМФ» рассмотрен теоретический минимум для решения конкурсных задач.

Приведен теоретический материал по ознакомлению с доказательством формулы Пика, алгоритмами построения графиков функции «целой и дробной части числа». Разобран демонстрационный вариант задания.